1. Representaciones: repaso y continuación)
   - Representaciones de C*-álgebras conmutativas (I).
   - C*-álgebras de grupos discretos.

2. Teorema de Gelfand-Naimark
   - Funcionales positivas (I)
   - Construcción GNS (Gelfand-Naimark-Segal)
   - Funcionales Positivas (II)
   - Estados
   - Teorema de Gelfand–Naimark

Representaciones

Definición

Una representación de una $*$-álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras $\pi : A \to B(\mathcal{H})$.

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

$$\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{T \in \mathrm{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') : \ T\pi(a) = \pi'(a)T, \ \forall a \in A\}$$

se llaman operadores de intercambio. Si existe $T \in \mathcal{I}(\pi, \pi')$ unitario se dice que π y π' son unitariamente equivalentes.
Si $\pi = \pi'$ en lugar de $\mathcal{I}(\pi, \pi')$ se pone $\pi(A)'$, y a este conjunto se le llama conmutante de $\pi(A)$, ya que

$$\pi(A)' = \{T \in \mathrm{B}(\mathcal{H}) : \ T\pi(a) = \pi(a)T, \ \forall a \in A\}.$$

Definición

*Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π-**invariante** si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Si existe un subespacio cerrado π-invariante $\mathcal{K}$, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, se dice que π es **reducible**. En caso contrario se dice que π es **irreducible**.*

Teorema (Lema de Schur)

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación de la C-álgebra A. Entonces π es irreducible si y sólo si $\pi(A)' = \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$.*

Definición

*Se dice que la representación $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es **cíclica** si existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$. En ese caso se dice que ξ es un vector **cíclico** para π.*

Proposición

Toda representación no degenerada es suma directa de representaciones cíclicas.

Representaciones de C*-álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C*-álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \ \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces $\pi_\mu : A \to \mathrm{B}(L^2(\mu))$ tal que $\pi_\mu(a) = M_a$ es una representación no degenerada de A.

Observar que $a \in \ker \pi_\mu$ sii $af = 0$ ctp$[\mu]$ $\forall f \in L^2(\mu)$, es decir, $a(x) = 0$ $\forall x \in \mathrm{sop}(\mu)$.

En otras palabras, $\ker \pi_\mu = C_0(X \setminus \mathrm{sop}(\mu))$. En particular π_μ es *fiel* sii $\mathrm{sop}(\mu) = X$.

C*-álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \to \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$.
Sea $\lambda : G \to \mathrm{B}(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$. Entonces λ es una representación unitaria de G, llamada ***representación regular izquierda de*** G.

Sea $\mathbb{C}G := \{a : G \to \mathbb{C}$ tal que a tiene soporte finito$\}$. El conjunto $\{\delta_t\}_{t \in G}$, donde $\delta_t(s) = \delta_{t,s}$, es una base para $\mathbb{C}G$. Entonces

$$a = \sum_{t \in G} a(t)\delta_t, \ \forall a \in \mathbb{C}G.$$

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G: si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b, dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s\in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s\in G:rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r\in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $a * b = \sum_{t\in G}\left(\sum_{r\in G} a(r)b(r^{-1}t)\right)\delta_t$.
También se define en $\mathbb{C}G$ una involución, que extiende a la inversión del grupo por antilinealidad: si $a = \sum_{t\in G} a(t)\delta_t \in \mathbb{C}G$, entonces

$$a^* = \sum_{t\in G} \overline{a(t)}\delta_{t^{-1}} = \sum_{t\in G} \overline{a(t^{-1})}\delta_t.$$

Es decir $a^*(t) = \overline{a(t^{-1})}$. Con estas operaciones $\mathbb{C}G$ se torna una $*$-álgebra compleja, que además tiene unidad: δ_e.

Dada una representación unitaria $u : G \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t\in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C*-álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \|\sum_{t\in G} a(t)u_t\| \leq \sum_{t\in G} |a(t)|\,\|u_t\| = \sum_{t\in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_\mu(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \ell^1(G) \to \mathrm{B}(\ell^2(G))$ es un $*$-homomorfismo inyectivo de $*$-álgebras.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^*-álgebra reducida de G es

$$C_r^*(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)} = \overline{\lambda(\ell^1(G))} \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(G)).$$

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1$, $\forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\| \ \|_\mu$ es una C*-norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^*-`álgebra plena de` G es $C^*(G)$, la completación de $\ell^1(G)$ con repecto a $\| \ \|_\mu$.

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$; la inversa está dada por $\pi \mapsto u_\pi$, tal que $u_\pi(t) := \pi(\delta_t)$.

Como $\| \ \|_r \leq \| \ \|_\mu$, el mapa identidad $id : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ se extiende por continuidad a un homomorfismo sobreyectivo $C^*(G) \to C^*_r(G)$ (también es denotado por λ), y por lo tanto $C^*_r(G)$ es un cociente de $C^*(G)$.

En general $C^*(G)$ y $C^*_r(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C^*_r(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2, dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$. Por ejemplo para cada n podemos tomar la matriz, digamos V_n, asociada a la permutación $e_i \mapsto e_{i+1}$ si $i < n$, $e_n \mapsto e_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y definir: $u^{(n)}(g_1) = Id_n$, $u^{(n)}(g_2) = V_n$.

Entonces $\pi_{u^{(n)}}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C} V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \ldots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u^{(n)}} \neq \ker \pi_{u^{(m)}}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo. Cuando sí lo es, y por lo tanto $C^*(G) = C_r^*(G)$, se dice que el grupo G es *promediable (''amenable'')*. Los grupos compactos y los abelianos son ejemplos de grupos promediables. Y el ejemplo que acabamos de ver muestra que $\mathbb{F}_2$ no es promediable.

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^*-álgebra y $\varphi : A \to \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

(1) Si $\pi : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^*-álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

(2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\mathrm{tr} : A \to \mathbb{C}$ es positiva, porque $\mathrm{tr}(a^*a) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geq 0$.

(3) Sean $A = \mathrm{B}(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$, y $\varphi_\xi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi_\xi \geq 0$ porque para todo $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ se tiene

$$\varphi_\xi(T^*T) = \langle T^*T\xi, \xi \rangle = \|T\xi\|^2 \geq 0.$$

(4) Más en general, si $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.

(5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $\varphi : A \to \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces

(1) *φ es continua.*

(2) *Si $a = a^*$, entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.*

(3) *$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, para todo $a \in A$.*

(4) *Sea $[\,,]_\varphi : A \times A \to \mathbb{C}$ dada por $[a, b]_\varphi := \varphi(b^* a)$. Entonces $[\,,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva acotada sobre A.*

(5) *$|\varphi(a)|^2 \leq \|\varphi\| \varphi(a^* a)$.*

(6) *φ se extiende a una funcional positiva $\widetilde{\varphi}$ sobre $\widetilde{A}$.*

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(\mathrm{Re}a)_+ - (\mathrm{Re}a)_-] + i[(\mathrm{Im}a)_+ - (\mathrm{Im}a)_-]$. Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$|\varphi(a)| \leq \varphi((\mathrm{Re}a)_+) + \varphi((\mathrm{Re}a)_-) + \varphi((\mathrm{Im}a)_+) + \varphi((\mathrm{Im}a)_-)$$
$$\leq K\left[\|(\mathrm{Re}a)_+\| + \|(\mathrm{Re}a)_-\| + \|(\mathrm{Im}a)_+\| + \|(\mathrm{Im}a)_-\|\right] \leq 4K\|a\|,$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K. Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n, así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado, el límite c está en A_+. Además $c \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} c_j$, de donde

$$\varphi(c) \geq \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} c_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}\varphi(c_j) > n,$$

porque $\varphi(c_j) > 2^j$. Entonces $\varphi(c) = \infty$, lo cual es una contradicción.

Continuación de la prueba.

(2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
(3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\mathrm{Re}a) + i\varphi(\mathrm{Im}a)$, y como $\mathrm{Re}a, \mathrm{Im}a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\mathrm{Re}a) - i\varphi(\mathrm{Im}a) = \varphi(\mathrm{Re}a - i\mathrm{Im}a) = \varphi(a^*)$.
(4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^*a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^*a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[\,,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
(5) Como $[\,,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\,[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi, \text{ o sea } |\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b).$$

En particular si (u_λ) es una unidad aproximada para A, se tiene que:

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_\lambda |\varphi(u_\lambda a)|^2 \leq \overline{\lim_\lambda} \varphi(a^*a)\varphi(u_\lambda^2) \leq \|\varphi\|\varphi(a^*a),$$

porque $\varphi(u_\lambda)^2 \leq \|\varphi\|$.

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\widetilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ. Entonces $\widetilde{\varphi}(a+\lambda) = \varphi(a) + \lambda\widetilde{\varphi}(1)$. Para que $\widetilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\widetilde{\varphi}((a+\lambda)^*(a+\lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}((a+\lambda)^*(a+\lambda)) &= \widetilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda} a + |\lambda|^2) \\
&= \varphi(a^*a) + \overline{\lambda}\varphi(a) + (\overline{\overline{\lambda}\varphi(a)}) + |\lambda|^2\widetilde{\varphi}(1) \\
&= \varphi(a^*a) + 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\varphi(a)) + |\lambda|^2\widetilde{\varphi}(1) \\
&\geq \varphi(a^*a) - 2|\lambda||\varphi(a)| + |\lambda|^2\widetilde{\varphi}(1) \\
&\geq \frac{1}{\|\varphi\|}\left[|\varphi(a)|^2 - 2|\lambda||\varphi(a)|\|\varphi\| + |\lambda|^2\|\varphi\|\widetilde{\varphi}(1)\right] \\
&= \frac{1}{\|\varphi\|}\left[(|\varphi(a)| - |\lambda|\|\varphi\|)^2 - |\lambda|^2\|\varphi\|^2 + |\lambda|^2\|\varphi\|\widetilde{\varphi}(1)\right] \\
&= \frac{1}{\|\varphi\|}\left[(|\varphi(a)| - |\lambda|\|\varphi\|)^2 + |\lambda|^2\|\varphi\|(\widetilde{\varphi}(1) - \|\varphi\|)\right]
\end{aligned}$$

Si se toma $\widetilde{\varphi}(1) \geq \|\varphi\|$, tenemos que $\widetilde{\varphi}$ es positiva.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \to \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ, tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a)$$
$$= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle = \|\rho(a)\eta\|^2.$$

Entonces $U : \pi(A)\xi \to \rho(A)\eta$, tal que $U(\pi(a)\xi) := \rho(a)\eta$, está bien definido y es una isometría entre subespacios densos de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, de modo que se extiende de manera única a un isomorfismo entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$.

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_\lambda U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_\lambda \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$. Luego $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$, ya que $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.
En otras palabras:

$$\rho(a) = U\pi(a)U^*, \ \forall a \in A.$$

Existencia:
Consideremos el semi-producto interno sobre A inducido por φ:
$[\,,\,]_\varphi : A \times A \to \mathbb{C}$ tal que $[a, b]_\varphi = \varphi(b^*a)$, $\forall a, b \in A$. Sea $\|\ \|_\varphi$ la seminorma inducida por $[\ ,\ ]_\varphi$, es decir: $\|a\|_\varphi = [a, a]_\varphi^{1/2} = \varphi(a^*a)^{1/2}$.

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \to A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* ax \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* ax) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x) = \|a\|^2 [x, x]_\varphi = \|a\|^2 \|x\|_\varphi^2.$$

Esto muestra que L_a es un operador acotado en $(A, \| \ \|_\varphi)$, con seminorma menor o igual a $\|a\|$. Por lo tanto, si $N_\varphi := \{x \in A : \ [x, x]_\varphi = 0\}$, entonces L_a induce un operador acotado $\pi'(a) : A/N_\varphi \to A/N_\varphi$, tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "L_a"] \arrow[d, "q"'] & A, \arrow[d, "q"] \\ A/N_\varphi \arrow[r, "\pi'(a)"'] & A/N_\varphi \end{tikzcd}$$

donde $q : A \to A/N_\varphi$ es la proyección canónica.

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A. Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle\ ,\ \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y)\rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A, considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned}\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 &= [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi = \varphi\big((u_\lambda - u_{\lambda_0})^*(u_\lambda - u_{\lambda_0})\big)\\ &\leq \varphi\big(\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(u_\lambda - u_{\lambda_0})\big) = \|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|\big(\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda_0})\big) < 2\epsilon^2/8,\end{aligned}$$

de modo que $\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda'}\| < \epsilon$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Luego la red (ξ_λ) es de Cauchy, y entonces converge a cierto $\xi \in \mathcal{H}$.

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A, con vector cíclico ξ.

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\pi(ab)\mathrm{q} = \mathrm{q}L(ab) = \mathrm{q}\big(L(a)L(b)\big) = \big(\mathrm{q}L(a)\big)L(b)$$
$$= \big(\pi(a)\mathrm{q}\big)L(b) = \pi(a)\big(\mathrm{q}L(b)\big) = \pi(a)\pi(b)\mathrm{q}.$$

  Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $\mathrm{q}(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.
- π preserva la involución:

$$\langle \pi(a^*)\mathrm{q}(x), \mathrm{q}(y)\rangle_\varphi = \langle \mathrm{q}(a^*x), \mathrm{q}(y)\rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi = \varphi(y^*(a^*x))$$
$$= \varphi((ay)^*x) = [x, ay]_\varphi = \langle \mathrm{q}(x), \mathrm{q}(ay)\rangle_\varphi$$
$$= \langle \mathrm{q}(x), \pi(a)\mathrm{q}(y)\rangle_\varphi = \langle \pi(a)^*\mathrm{q}(x), \mathrm{q}(y)\rangle_\varphi.$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π: como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \text{lím}_\lambda \pi(a)(\xi_\lambda) = \text{lím}_\lambda \pi(a)\mathrm{q}(u_\lambda) = \text{lím}_\lambda \mathrm{q}(au_\lambda) = q(a),$$

  entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi,\, a \in A\}} = \overline{\mathrm{q}(A)} = \mathcal{H}_\varphi.$$

- $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle_\varphi$:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \text{lím}_\lambda \varphi(u_\lambda a u_\lambda)\\ &= \text{lím}_\lambda \langle q(au_\lambda), q(u_\lambda)\rangle_\varphi\\ &= \text{lím}_\lambda \langle \pi(a)q(u_\lambda), q(u_\lambda)\rangle_\varphi\\ &= \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle_\varphi\end{aligned}$$

En resumen la construcción GNS establece una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia unitaria de representaciones cíclicas de A y el conjunto de funcionales lineales positivas de A.

$$\{(\pi, \mathcal{H}, \xi) \text{ rep. cíclica de } A\} \,/\sim_u \quad \overset{\mathsf{GNS}}{\rightleftarrows} \quad \{\varphi \text{ funcional positiva en } A\}$$

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^*-álgebra, y $\varphi : A \to \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

(i) $\varphi \geq 0$.

(ii) $\lim_\lambda \varphi(u_\lambda) = \|\varphi\|$, *para toda unidad aproximada* (u_λ) *de* A.

(iii) $\lim_\lambda \varphi(u_\lambda) = \|\varphi\|$, *para alguna unidad aproximada* (u_λ) *de* A.

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \mathrm{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de A. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned}\|\xi\|^2 &\geq \sup_{\|a\|\geq 1} |\langle \pi(a)\xi, \xi\rangle| = \sup_{\|a\|\geq 1} |\varphi(a)| = \|\varphi\| \\ &\geq \lim_\lambda \varphi(u_\lambda) = \lim_\lambda \langle \pi(u_\lambda)\xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2.\end{aligned}$$

Luego es $\lim_\lambda \varphi(u_\lambda) = \|\varphi\| = \|\xi\|^2$.

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 = \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| &= \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2 = \alpha^2 + (\beta - n)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2.$$

Entonces $\alpha^2 + \beta^2 + n^2 - 2n\beta \leq \|a\|^2 + n^2$, así que $-2n\beta \leq \|a\|^2 - \alpha^2 - \beta^2$ para todo n, lo cual es absurdo. Entonces $\beta = 0$, y por lo tanto $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \to_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Como $\varphi(u_\lambda - a) \leq \|\varphi\|\|u_\lambda - a\| \leq 1$, se concluye que $1 - \varphi(a) \leq 1$, y por lo tanto $\varphi(a) \geq 0$. Luego φ es positiva.

Corolario

Si A es una C^*-álgebra con unidad y $\varphi : A \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal, entonces $\varphi \geq 0$ si y sólo si $\varphi(1) = \|\varphi\|$.

Corolario

Si A es una C^*-álgebra y $\varphi, \psi : A \to \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$\|\varphi + \psi\| = \lim_\lambda (\varphi + \psi)(u_\lambda) = \lim_\lambda \varphi(u_\lambda) + \lim_\lambda \psi(u_\lambda) = \|\varphi\| + \|\psi\|.$ $\square$

Teorema de extensión de Hahn-Banach. Recordar que si F es un subespacio vectorial de un espacio normado E y $\varphi : F \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal continua, entonces existe una funcional lineal continua $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{C}$ tal que:

$$\tilde{\varphi}|_F = \varphi \quad \text{y} \quad \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|.$$

Se dice que $\tilde{\varphi}$ es una extensión de Hahn-Banach de φ.

Corolario

Sean B una C^*-subálgebra de la C^*-álgebra A, y $\varphi : B \to \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \to \mathbb{C}$ tal que $\psi_{|_A} = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^*-álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \to \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B = \tilde{\varphi}|_B = \varphi.$$

Además $\|\varphi\| \leq \|\psi\| \leq \|\tilde{\psi}\| = \|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Entonces $\|\varphi\| = \|\psi\|$. $\square$

Estados

Definición

Un **estado** *de la C*-álgebra A es una funcional lineal positiva* $\varphi : A \to \mathbb{C}$ *tal que* $\|\varphi\| = 1$*. Notación:* $\mathrm{S}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \ \varphi \ \text{ es un estado}\}$*.*

Notar que $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in \mathrm{S}(\mathrm{A})$ y $t \in [0,1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ *es normal, entonces* $\exists \varphi \in \mathrm{S}(A)$ *tal que* $|\varphi(a)| = \|a\|$ *y* $\|\varphi\| = 1$*.*

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^*-álgebra generada por a. Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B}\,)$. Como $\|a\| = \|\hat{a}\,\|_\infty$ y $\hat{a} \in C_0(\widehat{B}\,)$, existe $h \in \widehat{B}$ tal que $|\hat{a}\,(h)| = \|a\|$, es decir $|h(a)| = \|a\|$. Además $\|h\| = 1$ y $h \geq 0$. Entonces existe una funcional lineal positiva $\varphi : A \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi|_B = h$ y $\|\varphi\| = \|h\| = 1$. Finalmente: $|\varphi(a)| = |h(a)| = \|a\|$.

Definición (Suma directa de representaciones)

Sean A una C^*-álgebra y $\{\pi_i : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ una familia de representaciones de A. Definimos el espacio suma directa como

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \xi : I \to \cup_{i\in I}\mathcal{H}_i : \xi(i) \in \mathcal{H}_i \,\forall\, i, \;\; y \; \sum_{i\in I} \|\xi(i)\|^2 < \infty \right\}.$$

El espacio $\mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \xi, \eta \rangle := \textstyle\sum_{i\in I} \langle \xi(i), \eta(i) \rangle_{\mathcal{H}_i}.$$

Si $T_i \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_i)$, para todo $i \in I$ y existe M tal que $\|T_i\| \leq M$ para todo i, entonces $T := \bigoplus_{i\in I} T_i \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ donde $(T\xi)(i) = T_i(\xi(i))$.

Se define $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ como $\pi(a) = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(a)$. Entonces $(\bigoplus \pi_i, \oplus \mathcal{H}_i)$ se llama suma directa de la familia $(\pi_i, \mathcal{H}_i)_{i\in I}$.

Definición

Sea A una C^*-álgebra. La `representación universal` *de A es*

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in \mathsf{S}(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in \mathsf{S}(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La representación universal es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$; entonces $a^*a \in A_+$ y no es nulo. Entonces existe un estado $\varphi \in \mathsf{S}(A)$ tal que $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Sea $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ la GNS de φ, y sea

$$\xi : \mathsf{S}(A) \to \bigcup_{\psi \in \mathsf{S}(A)} \mathcal{H}_\psi \text{ tal que } \xi(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi \neq \varphi, \\ \xi_\varphi & \text{si } \psi = \varphi. \end{cases}$$

Entonces $\xi \in \bigoplus_{\psi \in \mathsf{S}(A)} \mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}_u$. Por lo tanto:

Continuación de la prueba.

$$\begin{aligned}\|\pi_u(a)\xi\|^2 &= \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi\rangle \\ &= \textstyle\sum_{\psi\in \mathrm{S}(A)} \langle \pi_\psi(a)\xi(\psi), \pi_\psi(a)\xi(\psi)\rangle_{\mathcal{H}_\psi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \varphi(a^*a) \\ &= \|a\|^2.\end{aligned}$$

Entonces π_u es fiel.

Proposición

Si A es separable existe una representación fiel $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ separable.

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A. Para cada n existe $\varphi_n \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n, $\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$, $\pi = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \pi_n$, y $\widetilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n$ tal que $\widetilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$

Notar que $\|\widetilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

(a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \ \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle \mathrm{q}(a), \mathrm{q}(b)\rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{\mathrm{q}(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.

(b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.

(c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n.

$$\begin{aligned}\|\pi(a_n)\|^2 \geq \|\pi(a_n)\widetilde{\xi}_n\|^2 &= \langle \pi(a_n^* a_n)\widetilde{\xi}_n, \widetilde{\xi}_n\rangle = \langle \pi_n(a_n^* a_n)\xi_n, \xi_n\rangle \\ &= \varphi(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2 \geq \|\pi(a_n)\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$.

$\square$

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : \ a_{ij} \in A \quad \text{para todos} \quad i,j = 1,\ldots,n\}$*, donde* A *una* C^**-álgebra,* $n \in \mathbb{Z}^+$*. Se define:*

$$\begin{aligned}
(a_{ij})(b_{ij}) &= (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \\
(a_{ij}) + (b_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) \\
\lambda(a_{ij}) &= (\lambda a_{ij}) \\
(a_{ij})^* &= (a_{ji}^*)
\end{aligned}.$$

Entonces $M_n(A)$ *es una* $*$*-álgebra, y existe una única norma sobre* $M_n(A)$ *con la cual* $M_n(A)$ *es una* C^**-álgebra.*

Demostración.

Sólo hace falta probar la existencia de una tal C*-norma. Por el teorema de Gelfand-Naimark se puede suponer que $A \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Como $\mathrm{B}(\mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}) \cong M_n\big(\mathrm{B}(\mathcal{H})\big)$, podemos ver $M_n(A) \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H}^n)$. Restringiendo la norma de $\mathrm{B}(\mathcal{H}^n)$ a $M_n(A)$ obtenemos una C^*-norma sobre $M_n(A)$ (dicha norma es equivalente a: $\|(a_{ij})\| = \max\{\|a_{ij}\| : \ i,j \geq 1\}$). $\square$

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (producto tensorial algebraico). Del teorema anterior se deduce que sobre $M_n \otimes A$ existe una única C-norma. Por eso M_n es una C^*-álgebra* `nuclear`*. En general, dadas dos C*-álgebras A y B, puede haber más de una C^*-norma en $A \otimes B$ (siempre existe al menos una).*

Si A es tal que sólo existe una única C-norma en $A \otimes B$, para toda C*-álgebra B, se dice que A es* `nuclear`*.*